

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| <b>1. Autor scenariusza:</b> Wiesława Kozłowska                                                                                                                                                                                                                                                                                           | <b>2. Etap edukacyjny:</b> III |
| <b>3. Temat lekcji:</b> Procent składany.                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                |
| <b>4. Temat z podstawy programowej:</b> Ciągi.                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                |
| <b>5. Cel lekcji:</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ kształcenie samodzielnej pracy,</li> <li>▪ przekształcanie wzorów,</li> <li>▪ praktyczne wykorzystanie narzędzi matematycznych,</li> <li>▪ wdrażanie do aktywnej grupowej pracy na lekcji,</li> <li>▪ rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem.</li> </ul>                               |                                |
| <b>6. Przygotowanie uczniów (wiedza i umiejętności):</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ rozumie pojęcia procentu składanego,</li> <li>▪ wykazuje się znajomością zastosowania wzoru na procent składany.</li> </ul>                                                                                                                                                                      |                                |
| <b>7. Osiągnięcia uczniów (wiedza i umiejętności):</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ sprawnie wykonuje obliczenia rachunkowe,</li> <li>▪ pobudzanie aktywności i inicjatywy,</li> <li>▪ wpajanie nawyków argumentowania, posługiwania się językiem matematycznym,</li> <li>▪ budowanie u ucznia postawy zadowolenia z siebie,</li> <li>▪ stosuję wzór na procent składany.</li> </ul> |                                |
| <b>8. Formy pracy:</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                |
| <b>Formy pracy:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ praca indywidualna</li> <li>▪ praca w parach</li> <li>▪ praca z całą klasą</li> </ul>                                                                                                                                                                                        |                                |
| <b>9. Środki dydaktyczne</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Podręcznik</li> <li>▪ Zbiór zadań</li> <li>▪ Zestaw wybranych wzorów matematycznych CKE,</li> <li>▪ Kalkulator</li> </ul>                                                                                                                                                                        |                                |
| <b>10. Przebieg lekcji:</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                |

## FAZA WPROWADZAJĄCA: (5 min)

Temat lekcji: **Procent składany.**

- Czynności organizacyjno-porządkowe.
- Sprawdzenie pracy domowej.
- Podanie tematu lekcji i omówienie jej przebiegu:

## FAZA REALIZACYJNA: (20 min)

### 1. Przypomnienie pojęć związanych z ciągami (10 min)

- Nauczyciel przypomina z uczniami informacje ogólne dotyczące ciągów:
  - pojęcie ciągu,
  - wykres,
  - przykłady różnych ciągów

### 2. Omówienie zagadnień (10 min)

- podanie definicji i omówienie jej na konkretnych przykładach:

Kapitał w wysokości  $k$ , złożony w banku na rok przy oprocentowaniu rocznym w wysokości  $r$ , wynosi po roku  $k(1 + r)$ .

#### Przykład 1

Pani Kowalska wpłaciła do banku 1000 zł na lokatę oprocentowaną 6% w skali roku. Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał pani Kowalskiej po trzech latach, a do jakiej po dwudziestu?

Kwota po roku:  $1000 + 6\% \cdot 1000 = 1060$  [zł]

Kwota po 2 latach:  $1060 + 6\% \cdot 1060 = 1060 + 63,6 = 1123,6$  [zł]

Kwota po 3 latach:  $1123,6 + 6\% \cdot 1123,6 = 1123,6 + 67,416 \approx 1191,02$  [zł]

Wyznaczenie powyższą metodą kwoty, do jakiej wzrośnie kapitał pani Kowalskiej po dwudziestu latach, jest bardzo pracochłonne. Zauważmy jednak, że każdego roku do każdej złotówki bank dopisuje 6% odsetek, czyli co roku kapitał powiększa się 1,06 razy.

Kapitał wynosi więc:

po roku:  $k \cdot 1,06$

po 2 latach:  $k \cdot (1,06)^2$

po 3 latach:  $k \cdot (1,06)^3$

...

po 20 latach:  $k \cdot (1,06)^{20} \approx 1000 \cdot 3,20714 = 3207,14$  [zł]

Kapitał w wysokości  $k$ , złożony w banku na  $n$  lat na procent składany przy oprocentowaniu rocznym w wysokości  $r$ , po  $n$  latach wynosi  $k(1 + r)^n$ .

*Jeżeli w kolejnych latach odsetki dopisywane są do kapitału powiększonego o wcześniej nagromadzone odsetki, to mówimy, że kapitał został złożony na **procent składany**.*

*Dopisywanie odsetek do kapitału nazywa się **kapitalizacją odsetek** lub krótko **kapitalizacją**, a czas, po jakim ona następuje, nazywa się **okresem kapitalizacji**.*

#### Przykład 2

Rodzice Basi złożyli w banku 5000 zł na trzy lata. W pierwszym roku oprocentowanie wynosiło 6%, w ostatnich dwóch latach 5%, a kapitalizacja odsetek następowała co rok. Oblicz, jaką kwotę podejmą z banku po trzech latach, a jaką kwotę podjęliby po tym czasie, gdyby od naliczanych odsetek pobierano co roku podatek w wysokości 20%.

Oszczędności po trzech latach wyniosą:  $5000 * 1,06 * (1,05)^2 = 5843,25$  [zł].

Gdyby odsetki pomniejszane były o 20%, to w pierwszym roku wyniosłyby:

$$0,06 * 0,8 = 0,048 = 4,8\%$$

a w drugim i trzecim roku:

$$0,05 * 0,8 = 0,04 = 4\%$$

Zatem po trzech latach mieliby:  $5000 * (1,048) * (1,04)^2 \approx 5667,58$  [zł].

Uwaga. W Polsce podatek od odsetek wynosi 19%. W tym rozdziale, dla ułatwienia obliczeń, podatek ten pomijamy lub przyjmujemy, że wynosi 20%. Zwróć uwagę na to, że podatek dotyczy tylko dopisywanych odsetek, a nie zgromadzonego kapitału.

### Ćwiczenie 1

Kapitał 5000 zł złożono w banku na dziesięć lat na lokatę o oprocentowaniu wynoszącym 5% i rocznej kapitalizacji odsetek. Oblicz wielkość dopisywanych odsetek. Jak zmieniłaby się wielkość kapitału, gdyby od odsetek naliczany był podatek w wysokości 20% w skali roku?

### Ćwiczenie 2

Kapitał w wysokości 800 zł złożono w banku na pięć lat. Oblicz wielkość kapitału po upływie tego czasu, jeśli kapitalizacja odsetek była roczna, a oprocentowanie:

- a) w pierwszych dwóch latach wynosiło 8%, w ostatnich trzech – 4%,
- b) w pierwszych trzech latach wynosiło 4%, w ostatnich dwóch – 8%,
- c) w pierwszych dwóch latach wynosiło 7%, w kolejnych dwóch – 5%, w ostatnim roku – 2%.

Oblicz wielkość kapitału końcowego, jeżeli od odsetek naliczano podatek w wysokości 20% w skali roku.

**TWIERDZENIE:**

Kapitał w wysokości  $k$ , złożony w banku na  $n$  lat przy oprocentowaniu rocznym  $r$  i kapitalizacji  $m$  razy w roku, po  $n$  latach wynosi:

$$k * \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m*n}$$

Roczną stopę procentową  $r$  taką, że odsetki w wysokości  $\frac{r}{m}$  kapitalizowane są  $m$  razy w roku, nazywa się **nominalną stopą** procentową. Rzeczywisty przyrost kapitału pokazuje **efektywna stopa** procentowa  $p$ , dla której odsetki kapitalizowane są raz, na koniec roku. Między tymi stopami zachodzi następująca zależność:

$$1 + p = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$$

### Ćwiczenie 1

Pani Katarzyna złożyła w banku kwotę 10 000 zł na lokatę oprocentowaną 4% rocznie. Oblicz, do jakiej kwoty wzrośnie jej kapitał po pięciu latach, jeśli odsetki będą kapitalizowane co:

- a) rok,
- b) pół roku,
- c) kwartał,
- d) miesiąc.

### Ćwiczenie 2

Jurek zamierza kupić mikroskop za 738 zł. Na ten cel dostał od rodziców 400 zł. Pozostałe pieniądze mają pochodzić z lokaty terminowej założonej dwa lata temu. Czy Jurkowi wystarczy pieniędzy, jeżeli lokata wynosiła 300 zł i była oprocentowana 6% w skali roku przy miesięcznej kapitalizacji odsetek?

### ZADANIA:

1. Jaką kwotą będziemy dysponowali po  $n$  latach, jeżeli złożymy w banku na procent składany 2000 zł przy oprocentowaniu rocznym  $r$ ?
  - a)  $n = 2, r = 5\%$
  - b)  $n = 5, r = 5\%$
  - c)  $n = 10, r = 3\%$

2. Kapitał w wysokości 600 zł został złożony w banku na pięć lat. Oblicz wielkość kapitału po upływie tego okresu, jeżeli kapitalizacja była roczna, a oprocentowanie wynosi w pierwszym roku:
- a) 6%, w drugim roku – 5,5%, a w trzech ostatnich latach – 4%,
  - b) 5,5%, w trzech kolejnych latach – 4%, a w ostatnim roku – 6%.
3. Oprocentowanie lokat w banku *A* wynosiło w kolejnych czterech latach: 9%, 8%, 7% i 6%. Stopa procentowa w banku *B* była w tym czasie stała i wynosiła  $r$ . Oblicz  $r$ , jeśli wpłacenie kapitału na cztery lata było w obu bankach równie opłacalne i oba banki kapitalizowały odsetki rocznie.
4. Jaką kwotę należy ulokować na koncie, aby po pięciu latach uzyskać 1217 zł, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 4%, a odsetki kapitalizowane są co rok? Jaką kwotę należałoby złożyć, aby uzyskać ten sam kapitał końcowy po trzech latach?
5. Do banku wpłacono 3000 zł na trzy lata przy rocznej stopie procentowej 6%. Ile będzie wynosił kapitał po upływie tego okresu, jeśli odsetki są kapitalizowane:
- a) co pół roku,
  - b) b) co kwartał,
  - c) c) co miesiąc,
  - d) d) codziennie?

#### **FAZA PODSUMOWUJĄCA** (5 min)

Uczniowie odpowiadają na pytania:

- Czym zajmowaliśmy się na dzisiejszej lekcji?
- Podaje wzór na procent składany?