

Scenariusz lekcji dla klasy II technikum

Temat: **Pierwiastki całkowite i pierwiastki wymierne wielomianu**

Cel ogólny:

Nabywanie przez uczniów umiejętności rozwiązywania równań wielomianowych metodami innymi niż metoda „grupowania” i „wyłączenia przed nawias”.

Cele operacyjne:

uczeń:

- wyznacza dzielniki całkowite i wymierne liczby;
- sprawdza która z liczb jest pierwiastkiem wielomianu;
- wykonuje dzielenie wielomianu przez dwumian;
- rozwiązuje równanie kwadratowe;
- Podaje pierwiastki rzeczywiste wielomianu.

Środki dydaktyczne:

- podręcznik „MATEMATyka 2. Zakres rozszerzony” wyd. Nowa Era
- rzutnik multimedialny, ekran

Metody i formy:

- praca indywidualna.

Przebieg lekcji

1. Część wprowadzająca:
 - sprawdzenie obecności;
 - krótkie omówienie z uczniami celów operacyjnych lekcji.
2. Realizacja tematu lekcji

I. Przypomnienie definicji

Definicja: Wielomian

Wielomianem stopnia n zmiennej rzeczywistej x nazywamy funkcję $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, gdzie a_i to współczynniki wielomianu należące do zbioru liczb rzeczywistych i $n \in \mathbb{N}$.

Definicja: Pierwiastek wielomianu

Każdą liczbę r , dla której $w(r) = 0$ nazywamy pierwiastkiem (miejszem zerowym) wielomianu.

II. Wprowadzenie

Twierdzenie: O pierwiastkach całkowitych wielomianu

Jeżeli wielomian $w(x)$ ma pierwiastek całkowity to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego.

Omówienie twierdzenia na przykładzie

→ wyraz wolny

Rozwiąż równanie $5x^3 - 8x^2 - 5x + 2 = 0$.

Rozw. Pamiętajmy, że rozwiązaniem równania wielomianowego może być liczba rzeczywista. **1.** Zaczynamy od szukać dla tego równania tylko pierwiastków całkowitych.

Na początek wyznaczmy **dzielniki całkowite** wyrazu wolnego $a_0 = 2$: $-2, -1, 1, 2$.

Teraz sprawdzamy dla którego z dzielników $w(x) = 0$.

$$w(-2) = 5(-2)^3 - 8(-2)^2 - 5(-2) + 2 = -40 - 32 + 10 + 2 \neq 0$$

$$w(-1) = 5(-1)^3 - 8(-1)^2 - 5(-1) + 2 = -5 - 8 + 5 + 2 \neq 0$$

$$w(1) = 5 \cdot 1^3 - 8 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 2 = 5 - 8 - 5 + 2 \neq 0$$

$$w(2) = 5 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 2 = 40 - 32 - 10 + 2 = 0$$

Stąd mamy, że liczba 2 jest pierwiastkiem (miejszem zerowym, rozwiązaniem równania) wielomianu.

2. Kolejny krok to sprawdzić czy równie ma więcej rozwiązań. Wykonujemy dzielenie.

$$\begin{array}{r}
 (5x^3 - 8x^2 - 5x + 2) : (x - 2) = 5x^2 + 2x - 1 \\
 \underline{-5x^3 + 10x^2} \\
 = 2x^2 - 5x \\
 \underline{-2x^2 + 4x} \\
 = -x + 2 \\
 \underline{-x + 2} \\
 0
 \end{array}$$

Zapisujemy $5x^3 - 8x^2 - 5x + 2 = (5x^2 + 2x - 1) \cdot (x - 2)$.

3. Rozwiązujemy równanie $5x^2 + 2x - 1 = 0$, jego rozwiązaniem są $x_1 = \frac{-1-\sqrt{6}}{5}$ i $x_2 = \frac{-1+\sqrt{6}}{5}$.

Twierdzenie: O pierwiastkach wymiernych wielomianu

Jeżeli wielomian $w(x)$ ma pierwiastek wymierny to licznik tego pierwiastka jest dzielnikiem wyrazu wolnego, a mianownik jest dzielnikiem współczynnika przy najwyższej potędze.

Omówienie twierdzenia na przykładzie współczynnik przy najwyższej potędze
↗ ↗ wyraz wolny
 Rozwiąż równanie $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$.

Rozw. 1. Zaczynamy od szukać dla tego równania tylko pierwiastków całkowitych.

Na początek wyszukamy **dzielniki całkowite** wyrazu wolnego $a_0 = 1 : -1, 1$.

Teraz sprawdzamy dla którego z dzielników $w(x) = 0$.

$$w(-1) = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 + 3(-1) + 1 = -2 + 3 - 3 + 1 \neq 0$$

$$w(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = 2 + 3 + 3 + 1 \neq 0$$

Z obliczeń wynika, że równanie nie ma pierwiastków całkowitych.

2. Może mieć pierwiastki wymierne $\frac{p}{q}$, gdzie p to dzielniki wyrazu wolnego, a q to dzielniki współczynnika przy najwyższej potędze.

Wyszukamy **dzielniki całkowite** wyrazu wolnego $a_0 = 1 : -1, 1$. (p)

Wyszukamy **dzielniki całkowite** współczynnika przy najwyższej potędze zmiennej x
 $a_3 = -2, -1, 1, 2$. (q)

Zatem prawdopodobne dzielniki

$$\frac{p}{q} : \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}, \frac{-1}{-1} = 1, \frac{-1}{1} = -1, \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}, \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}, \frac{1}{-1} = -1, \frac{1}{1} = 1, \frac{1}{2}.$$

Teraz sprawdzamy dla którego z dzielników $w(x) = 0$, tylko dla $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

$$w\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1 = 0$$

$$w\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + 1 \neq 0$$

Stąd mamy, że liczba $-\frac{1}{2}$ jest pierwiastkiem wymiernym (miejszem zerowym, rozwiązaniem równania) wielomianu.

3. Kolejny krok to sprawdzić czy równie ma więcej rozwiązań. Wykonujemy dzielenie.

$$\begin{array}{r} (2x^3 + 3x^2 + 3x + 1) : \left(x + \frac{1}{2}\right) = 2x^2 + 2x + 2 \\ \underline{-2x^3 - x^2} \\ \phantom{(2x^3 + 3x^2 + 3x + 1) : \left(x + \frac{1}{2}\right) = } 2x^2 + 3x \\ \phantom{(2x^3 + 3x^2 + 3x + 1) : \left(x + \frac{1}{2}\right) = } \underline{-2x^2 - x} \\ \phantom{(2x^3 + 3x^2 + 3x + 1) : \left(x + \frac{1}{2}\right) = } 2x + 1 \\ \phantom{(2x^3 + 3x^2 + 3x + 1) : \left(x + \frac{1}{2}\right) = } \underline{-2x - 1} \\ \phantom{(2x^3 + 3x^2 + 3x + 1) : \left(x + \frac{1}{2}\right) = } 0 \end{array}$$

$$2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (2x^2 + 2x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

4. Rozwiązujemy równanie $2x^2 + 2x + 2 = 0$, nie ma ono rozwiązania $\Delta = -12$.

Praca indywidualna ucznia

Zadania do rozwiązania na lekcji.

Zad. 1 a, b, d, f str. 42, zad. 2 b, f str. 42, zad. 3 b str. 42 zad. 5 a, b str. 43

III. Ewaluacja

Nauczyciel zadaje uczniom pytania:

Jakie liczby mogą być pierwiastkami równania wielomianowego?

Czym można się posłużyć, aby wyznaczyć pierwiastki całkowite, wymierne równania wielomianowego, wiedząc?

Jak rozwiązać równanie $2x^3 + x^2 + x = 1$?

Zadania do rozwiązania w domu.

zad. 1 c, e str. 42,

zad. 2 a str. 42,

zad. 3 c str. 42.